

## Topologia

### Lista 1 (przestrzenie metryczne, zbieżność)

**Zad 1.** Sprawdzić, czy funkcja  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest metryką na  $\mathbb{R}$ , gdzie

$$a) d(x, y) = |x| + |y|, \quad b) d(x, y) = |x| \cdot |y|, \quad c) d(x, y) = |x - y|^2.$$

**Zad 2.** Dla jakich odwzorowań  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  funkcja  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$  jest metryką w  $X$ ?

**Zad 3.** Sprawdzić, czy funkcja  $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $d(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , jest metryką w  $\mathbb{N}$ . Jeśli tak, to jak wyglądają kule  $K_1(1)$ ,  $K_{\frac{1}{2}}(1)$  oraz  $K_{\frac{1}{2}}(3)$  w tej metryce.

**Zad 4.** Pokazać, że jeśli  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną, to metrykami są również funkcje

$$d_1(x, y) = a \cdot d(x, y), \quad a > 0, \quad d_2(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}, \quad d_3(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Pokazać, że metryki te wprowadzają na  $X$  tą samą rodzinę zbiorów otwartych, co wyjściowa metryka  $d$ .

**Zad 5.** Uzasadnić, że następujące funkcje na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  są metrykami:

$$d_e(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad (\text{metryka euklidesowa}),$$

$$d_t(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad (\text{metryka taksówkowa}),$$

$$d_m(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad (\text{metryka maximum}),$$

$$d_w(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|} + \sqrt{|x_2 - y_2|} \quad (\text{metryka „wklęsła”}),$$

gdzie  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ . Wyznaczyć postać kul otwartych dla tych metryk oraz pokazać, że wprowadzają one na  $\mathbb{R}^2$  tę samą rodzinę zbiorów otwartych.

**Zad 6.** Uzasadnić, że następujące funkcje są metrykami na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$ . Są to odpowiednio tzw. *metryka studni* oraz *metryka rzeki*:

$$d_s(x, y) = \begin{cases} d_e(x, y), & \text{gdy } x, y \text{ leżą na tej samej prostej} \\ & \text{przechodzącej przez punkt } (0, 0), \\ d_e(x, (0, 0)) + d_e(y, (0, 0)), & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

$$d_r(x, y) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & \text{gdy } x_1 = y_1 \\ |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2|, & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

gdzie  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  oraz  $d_e$  jest metryką euklidesową. Wyznaczyć postać kul otwartych oraz podać interpretacje „topologiczne” dla tych metryk.

**Zad 7.** Niech  $d_e$  będzie metryką euklidesową, a  $d_d$  metryką dyskretną na prostej  $\mathbb{R}$ . Pokazać, że funkcja

$$d_{e \times d}((x, y)(u, v)) = d_e(x, u) + d_d(y, v)$$

jest metryką na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  oraz wyznaczyć postać kul w tej metryce.

**Zad 8.** Scharakteryzować zbieżność ciągu w przestrzeni z metryką dyskretną.

**Zad 9.** Zbadać zbieżność ciągu  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  punktów na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  we wszystkich metrykach z zadań 5, 6, 7 i 8, gdzie

	$a_n$		$a_n$		$a_n$		$a_n$
a)	$(1, 2 - \frac{1}{n})$	c)	$(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{3}{n^2})$	e)	$(\frac{1-2n}{n}, \pi)$	g)	$(\frac{2n+1}{n}, \frac{2n+1}{n})$
b)	$(-1, -1)$	d)	$(3 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{2n})$	f)	$(-2, \frac{(1+n)^2}{n^2+2n+1})$	h)	$((1 + \frac{1}{n})^n, 0)$

**Zad 10.** Sprawdzić, czy ciąg funkcji  $x_n$  jest zbieżny do funkcji  $\alpha$  w przestrzeni  $C[a, b]$  z metryką supremum, gdy

N	$C[a, b]$	$x_n$	$\alpha$
a)	$C[-3, 3]$	$\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^3}}$	$ t $
b)	$C[0, 8]$	$(\frac{t}{8})^n - (\frac{t}{8})^{2n} + t$	$t$
c)	$C[0, 1]$	$t^{2n} - t^{n+1} + t$	$t$
d)	$C[-4, 4]$	$\frac{1}{n^2} \sqrt{n^4 t^2 + 1}$	$t$
e)	$C[1, 2]$	$n^2 (\sqrt{t + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{t})$	$\frac{1}{2\sqrt{t}}$
f)	$C[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$	$\frac{t^n - t}{1 + t^n}$	$1$
g)	$C[0, 1]$	$\sqrt[n]{1 + t^n}$	$t$
h)	$C[0, \frac{1}{3}]$	$3^n t^n - 3^{n+1} t^{n+1} - 3t^n$	$0$
i)	$C[0, 2]$	$\sqrt[n]{1 + t^n}$	$\begin{cases} 1, & t \in [0, 1] \\ t, & t \in [1, 2] \end{cases}$

**Zad 11.** Znaleźć granicę ciągu funkcji  $x_n$ , jeśli ona istnieje, w przestrzeni  $C[a, b]$  z metryką supremum, gdy

N	$C[a, b]$	$x_n$
a)	$C[-1, 0]$	$\frac{1}{n} \sqrt[3]{n^3 t + 1}$
b)	$C[1, 2]$	$\frac{2t^n - 1}{1 + t^n}$
c)	$C[-1, \frac{1}{2}]$	$\frac{(t+1)^{2n} - t^{2n}}{(t+2)^{2n}}$
d)	$C[1, 2]$	$n \sin(\frac{t^2}{n}) + \frac{t^3}{n}$
e)	$C[0, 9]$	$\frac{9^n t^n - t^{2n}}{9^{2n}}$
f)	$C[-1, 5]$	$\text{arctg}(n(t^2 + 1))$
g)	$C[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$(\sin t)^{2n} + \sqrt[3]{\frac{t}{n}}$
h)	$C[1, 2]$	$\frac{t^2}{n^2} \ln(\frac{t}{n})$